



土壤可蚀性、坡度、坡长、作物覆盖和水土保持措施五大因子的定量描述与集成组装,本质上是一个多因子逐级订正模型。

土壤侵蚀统计模型包括单变量侵蚀模型和多变量侵蚀模型,二者必须以小流域试验观测数据、资料为支撑。1947年Musgrave建立了最早的多变量降雨产沙量统计模型<sup>[8]</sup>,其一般形式为:

$$E = FRS^A L^B P^C, \quad (1)$$

式中: E 年土壤侵蚀模数; F 为土壤可蚀性参量; R 为覆盖因子; S 为坡度; L 为坡长; P 为侵蚀降雨量; A、B、C 均为待定参数。

式(1)的更一般形式为:

$$E = B \prod_{i=1}^{m_1} X_{1i}^{A_i} \prod_{i=m_1+1}^m X_{2i}^{A_i}, \quad (2)$$

式中:  $\{X_{1i}\}$ 、 $\{X_{2i}\}$  为降雨侵蚀影响因子集。上两式为柯布2道格拉斯函数型统计模型。侵蚀影响因子集  $\{X_{1i}\}$  中各因子的弹性系数为 1, 侵蚀影响因子集  $\{X_{2i}\}$  中第 i 个因子的弹性系数为  $\{A_i\}$ , 即:

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial X_{1i}} \frac{X_{1i}}{E} = 1 \\ \frac{\partial E}{\partial X_{2i}} \frac{X_{2i}}{E} = A_i \end{cases} \quad (3)$$

由于降雨侵蚀过程的复杂性,土壤侵蚀模数随侵蚀影响因子的变化一般具有高维、非线性、非正态分布特征,建立柯布2道格拉斯函数型模型及各种常规统计模型一般很难获得良好效果<sup>[9]</sup>,这是由模型本身的结构、功能与适应性决定的。即使在严格控制的试验条件下,通过固定诸多因子,选取坡长 L、坡度 S、降雨强度 I、降雨历时 T 四个因子,分别进行包含 2~4 个自变量对土壤侵蚀模数 E 作用影响关系的试验,并建立常规柯布2道格拉斯函数型统计模型,往往模拟优度、精度并不理想。通用土壤流失方程 USLE 及其各种改进模型,在规整、缓坡条件下具有一定适用性;各侵蚀因子的弹性系数亦为常数;其地域差异通过修正因子值来体现,故模型通用性差;在复杂侵蚀动力2环境条件下,所需参数信息量巨大,而预报效果并不佳乃至误差很大。

本文基于对作者在文献[10, 11]中构建的灰色离散序列高阶动态 GMS(m, 1)模型的扩展,建立了高维指数非线性模型。既可用于单变量系统建模,也可用于多变量系统建模;可以揭示复杂系统输出数据信息的内在规律;具有信息包容量大、模型结构开放性强、模拟优度良好、适应性广泛等特点。

## 2 高维指数非线性 GWS(n, m) 建模原理

对单自变量非正态、非线性系统输出观测数据序列  $\{E(x)\}$ , 按其变动特征作变量变换:  $y(x) = f\{E(x)\}$ 。当  $\{y(x)\}$  序列具有单指数或多单指数复合衰减变动特征时,可采用作者在文献[10, 11]中提出的灰色离散序列高阶动态 GMS(n, 1)模型进行参数辨识:

$$y(x) = B_0 + \sum_{k=1}^n B_k e^{a_k x}, \quad (4)$$

式中:  $B_0$ 、 $\{B_k\}$ 、 $\{a_k\}$  为待定参数。式(4)适用于等差自变量离散序列如离散时间序列建模。当  $\{y(x)\}$  序列具有单指数高次复合衰减变动特征,即  $A = -ku$  时,可将式(4)扩展为单变量高维指数非线性 GWS(n, 1)模型:

$$y(x) = B_0 + \sum_{k=1}^n B_k e^{-kux}, \quad (5)$$

式中:  $B_0$ 、 $\{B_k\}$  为待定参数, u 为待搜索参数; n 定义为广义维数,即一维单变量模型可扩展为广义 n 维指数线性组合模型。显然,式(5)是常规高次方程的变换形式。

$$\begin{cases} \frac{dy(x)}{dx} = u \sum_{k=1}^n k B_k e^{-kux} \\ A = \frac{dy(x)}{dx} \frac{x}{y(x)} = u \sum_{k=1}^n k B_k e^{-kux} \left/ \left[ B_0 + \sum_{k=1}^n B_k e^{-kux} \right] \right. \end{cases} \quad (6)$$

当  $u > 0$  时,  $\lim_{xy \downarrow} y(x) = B_0$ ;  $\lim_{xy \downarrow} \frac{dy}{dx} = 0$ ;  $\lim_{xy \downarrow} A = 0$ . 即  $\frac{dy(x)}{dx}$ 、 $A$  具有振荡性递减变化特征. 因此, 式(5) 具有振荡递减非线性、非正态行为特征.

对多自变量系统:  $\{X\} = [\{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_m\}]$ , 其输出观测数据序列为  $\{E(x)\}$ . 按式(5) 分别进行单变量高维非线性模拟, 取复相关系数  $\{R_k^2\}$  为最大值的自变量作为主变量, 其余自变量作为辅助变量. 多变量高维指数非线性 GWS(n, m) 模型的一般形式为:

$$y(x) = B_0 + \sum_k^n B_k e^{-kx_1} + \sum_{k=1}^n \sum_{i=2}^m C_{ki} x_i^{kx_i} e^{-kx_1} + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m D_{kij} x_i x_j e^{-kx_1}, \tag{7}$$

式中,  $\{x_1\}$  为主变量数据序列,  $\{x_2\} y \{x_m\}$  为辅助变量数据序列.  $K$  为选择参数, 一般情况下取  $K=1$  或  $K=IPu$ . 式(7) 中第二项为主变量作用项, 第三项为辅助变量作用项, 第四项为交互作用项.

高维指数非线性模型仍以误差平方和极小化作为判别准则, 采用最小二乘法进行参数搜索与辨识.

### 3 高维指数非线性 GWS( n, m) 模型参数搜索与辨识方法

对于单自变量高维指数非线性 GWS( n, 1) 模型式(5), 先取维数  $j$ , 给出待搜索参数的初始值  $u_0$ , 设中间变量为:

$$G_k(x, u_0) = e^{-k_0 x}, \quad k = 1, 2, \dots, j, \tag{8}$$

则式(5) 变换为:

$$y(x) = B_0 + \sum_{k=1}^j B_k G(x, u_0). \tag{9}$$

对于既定维数  $j$ , 通过计算机编程可搜索出误差平方和  $Q$  极小化条件下待搜索参数的优化值  $u(j)$ , 即  $\frac{5Q(x, u)}{5u} = 0$ . 由小到大顺次改变维数  $j = 1, 2, \dots$ , 搜索出不同维数  $j$  时待搜索参数的优化值  $u(j)$ . 则最终待搜索参数的优化值为:  $u = \max\{u(j)\}$ , 其相应的维数  $n$  随之而定.

对于多自变量高维指数非线性 GWS( n, m) 模型式(7), 先采用式(8)、(9) 搜索出各自变量的维数及待搜索参数优化值, 找出主变量和辅助变量. 设主变量作用项的中间变量  $G_k(x_1)$ 、辅助变量作用项的中间变量  $U_{ki}(x_i)$ 、交互作用项的中间变量  $W_{kij}(x_i, x_j)$  分别为:

$$\begin{cases} G_k(x_1, u) = e^{-kx_1} & (10) \\ U_{ki}(x_i) = x_i^{kx_i} G_k(x_1, u) = x_i^{kx_i} e^{-kx_1} & (11) \\ W_{kij}(x_i, x_j) = x_i x_j G_k(x_1, u) = x_i x_j e^{-kx_1} & (12) \end{cases}$$

则式(7) 可简化为:

$$y(X) = B_0 + \sum_k^n B_k G_k(x_1) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=2}^m C_{ki} U_{ki}(x_i) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m D_{kij} W_{kij}(x_i, x_j). \tag{13}$$

受观测数据样本量限制, 当  $m \leq 3$  时, 可直接按式(13) 建模; 当  $m > 3$  时, 应略去交互作用项, 剔除部分扩展中间自变量后建模.

以主变量的维数作为式(13) 的基本维数; 重新给出待搜索参数的初始值  $u_0$ ; 生成式(10)~(12) 中各作用项中间变量序列, 搜索出式(13) 在误差平方和  $Q$  极小化条件下待搜索参数的优化值  $u$ .

### 4 土壤侵蚀 GWS( n, m) 模型应用

#### 4.1 试验设计

采用室内人工模拟降雨试验获取观测数据. 试验在中国科学院水土保持研究所完成.

试验 1: 降雨强度、降雨历时 2 累积土壤侵蚀模数组组合试验. 固定因子: 坡度为 15 度, 坡长 112m. 雨强分为 0.180、1.104、1.170、2.148、2.184  $mm \cdot min^{-1}$  五个水平, 降雨历时在 0~ 60min 间分 14 个间隔点. 共 5 场试验, 获得 5 @ 14 = 70 组观测数据.

试验 2: 坡度、降雨强度 2 累积土壤侵蚀模数组组合试验. 固定因子: 坡长 112m, 降雨历时 60min, 降雨强度

分为 0180、1104、1170、2148、2184mm. min<sup>-1</sup> 五个水平;坡度分为 10、15、20、25、30 度五个水平. 共 25 场试验, 获得 5 @5= 25 组观测数据.

试验 3: 坡长、降雨强度 2 累积土壤侵蚀模数组组合试验. 固定因子: 坡度 15 度, 降雨历时 60min. 降雨强度分为 0180、1104、1170、2148、2184mm. min<sup>-1</sup> 五个水平, 坡长分为 014m、018m、112m、116m、210m 五个水平. 共 25 场试验, 获得 5 @5= 25 组观测数据.

由试验 2、试验 3, 经组合可获得包含坡度 S、坡长 L、降雨强度 I 三个自变量与累积土壤侵蚀模数 E 的 25 @2= 50 组观测数据. 由试验 1、试验 2、试验 3, 经组合可获得包含坡度 S、坡长 L、降雨强度 I、降雨历时 T 四个自变量与累积土壤侵蚀模数 E 的 70+ 50= 120 组观测数据.

412 模型参数搜索 2 辨识结果

41211 GWS(4, 3) 模型 由试验 2、试验 3 经组合获得的样本量为 50 个. 作变量变换: y(I, S, L) = [E(I, S, L)]<sup>1/2</sup>; 应用式 (13) 经模拟筛选, 可建立包含降雨强度 I、坡度 S、坡长 L 三个自变量的土壤侵蚀 GWS(4, 3) 模型, 其具体形式为:

$$E(I, S, L) = \left[ B_0 + \sum_{k=1}^4 B_k e^{-kI} + \sum_{k=1}^4 C_{ks} S^k e^{-kI} + \sum_{k=1}^4 C_{kl} L^k e^{-kI} + \sum_{k=1}^4 D_k SL e^{-kI} \right]^2 \quad (14)$$

式 (14) 含 16 个扩展生成中间自变量, 18 个参数. 模型参数搜索 2 辨识结果见表 1.

表 1 土壤侵蚀 GWS(4, 3) 模型参数搜索 2 辨识结果

|                 |                 |                 |                 |                 |                 |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| u               | B <sub>0</sub>  | B <sub>1</sub>  | B <sub>2</sub>  | B <sub>3</sub>  | B <sub>4</sub>  |
| 0.6             | 1.306317266     | 8.954334695     | - 0.46242208    | 9.646820051     | - 7.04330879    |
| C <sub>1s</sub> | C <sub>2s</sub> | C <sub>3s</sub> | C <sub>4s</sub> | C <sub>1l</sub> | C <sub>2l</sub> |
| - 3.35367       | - 0.77266213    | 0.189606426     | - 0.01759334    | - 4.213073969   | - 0.27438616    |
| C <sub>3l</sub> | C <sub>4l</sub> | D <sub>1</sub>  | D <sub>2</sub>  | D <sub>3</sub>  | D <sub>4</sub>  |
| 0.039878        | 0.00121229      | 1.307660836     | 1.122143488     | - 1.306359051   | 0.390434008     |

41212 GWS(4, 4) 模型 由试验 1、试验 2、试验 3 经组合获得的样本量为 120 个. 略去部分辅助变量作用项与交互作用项, 作变量变换: y(T, I, S, L) = [E(T, I, S, L)]<sup>1/2</sup>; 据式 (13) 可建立包含降雨历时 T、坡度 S、坡长 L、降雨强度 I 四个自变量的土壤侵蚀 GWS(4, 4) 模型, 其具体形式为:

$$E(T, S, L, I) = \left[ B_0 + \sum_{k=1}^4 B_k e^{-kIT} + \sum_{k=1}^4 C_{ks} S^k e^{-kIT} + \sum_{k=1}^4 C_{kl} L^k e^{-kIT} + \sum_{k=1}^4 C_{ki} I^k e^{-kIT} \right]^2 \quad (15)$$

式 (15) 含 16 个扩展生成中间自变量, 18 个参数. 模型参数搜索 2 辨识结果见表 2.

表 2 土壤侵蚀 GWS(4, 4) 模型参数搜索 2 辨识结果

|                 |                 |                 |                 |                 |                 |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| u               | B <sub>0</sub>  | B <sub>1</sub>  | B <sub>2</sub>  | B <sub>3</sub>  | B <sub>4</sub>  |
| 0.019           | 0.092872958     | - 69303.24311   | 173986.9475     | - 57340.698     | - 187123.192    |
| C <sub>1s</sub> | C <sub>2s</sub> | C <sub>3s</sub> | C <sub>4s</sub> | C <sub>1l</sub> | C <sub>2l</sub> |
| - 73142.9072    | 255852.8018     | - 351280.2951   | 132482.66       | 140774.6373     | - 422329.985    |
| C <sub>3l</sub> | C <sub>4l</sub> | C <sub>1i</sub> | C <sub>2i</sub> | C <sub>3i</sub> | C <sub>4i</sub> |
| 404817.7916     | 39754.22665     | 248.2162247     | - 420.821042    | 350.7478305     | - 114.485133    |

413 模拟效果分析

对于土壤侵蚀高维指数非线性模型式 (14) 与式 (15), 其模拟效果以模拟优度与精度进行评判. 模拟优度用复相关系数 R<sup>2</sup>、模拟精度用平均误差率 D(百分率) 作为评判指标, 见表 3.

$$D = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [(1 - E_i / PE_i)^2]^{1/2} @100 \quad (16)$$

常规柯布 2 道格拉斯函数型土壤侵蚀统计模型的复相关系数 R<sup>2</sup> 多在 0165~ 0185 之间, 平均误差率 D 多在 25%~ 40% 之间<sup>[12]</sup>, 大多不能满足工程应用对模拟精度的要求.

本文两个多因子高维指数非线性模型的 F 检验值在 A= 0101 的水平上均达到极显著效果; 复相关系数 R<sup>2</sup> > 0196, 平均误差率 D < 15%. 模拟优度良好, 精度高, 可以满足工程应用的要求.

表 3 模拟效果及优度、精度评判指标

| 模型类别                        | 模拟优度与精度指标 |                         |             |          |
|-----------------------------|-----------|-------------------------|-------------|----------|
|                             | 样本量 N     | F 检验值                   | 复相关系数 $R^2$ | 平均误差率 D  |
| GWS(4, 3) 模型: E(I, S, L)    | 50        | 65.30368 <sup>###</sup> | 0.961708    | 8.816529 |
| GWS(4, 4) 模型: E(T, S, L, I) | 120       | 307.0861 <sup>###</sup> | 0.972539    | 13.73557 |

## 5 结论与展望

1) 本文通过对灰色离散序列高阶动态 GMS(m, 1) 模型的扩展, 建立了单变量高维指数非线性 GWS(n, 1) 模型. 通过对待搜索参数 u 与维数 n 进行计算机搜索, 经中间自变量生成, 可将单变量一维模型扩展为高维指数非线性模型. 可应用于时间序列))) 等差序列的非线性模拟与预测控制研究.

2) 基于单变量高维指数非线性 GWS(n, 1) 模型及其参数搜索 2 辨识原理, 将多变量分为主变量和辅助变量, 进而构建出多变量高维指数非线性 GWS(n, m) 模型. GWS(n, 1) 及 GWS(n, m) 模型具有非周期、非线性、非正态振荡递减行为特征. 各自变量的弹性系数呈振荡递减趋势并渐近与零, 这是本文模型与常规模型的最重要区别. 经过计算机编程, 本文模型参数搜索 2 辨识较为简便易行. 利用实测数据模拟应用结果表明, GWS(n, m) 模型模拟优度大大提高, 复相关系数  $R^2 > 0.96$ , 平均误差率  $D < 15\%$ . 模拟精度可满足工程应用的要求. 在实际复杂系统建模过程中, 可以通过调整变量维数进一步提高模拟精度, 以增强模型的实用价值. 高维指数非线性模型信息包容量很大, 模型结构开放性、信息辨识功能强, 适应性广泛.

3) 应用本文建模原理与方法, 通过对坡面土壤侵蚀三大作用- 影响因子进行系统研究, 概化、提炼出能全面表征土壤侵蚀作用特征的多变量体系, 有望建立具有广泛适用性的土壤侵蚀多变量高维指数非线性 GWS(n, m) 模型. 自然资源、生态环境、工程技术、社会经济等领域广泛存在高维、非线性、非正态过程及预测、控制问题. 本文模型、方法在这些领域及相近领域具有广泛适用性, 应用前景十分广阔.

### 参考文献:

- [1] 张光辉. 土壤水蚀预报模型研究进展[J]. 地理研究, 2001, 3(20): 274- 281.  
Zhang Guanghui. Development of soil erosion models in China[J]. Geographical Research, 2001, 3(20): 274- 281.
- [2] 姚文艺, 汤立群. 水力侵蚀产沙过程及模拟[M]. 黄河水利出版社, 2001: 168- 187.  
Yao Wenyi, Tang Liqun. Processes and Modeling of Soil Erosion and Sediment Yield by Water[M]. Huanghe Water Conservancy Press, 2001: 168- 187.
- [3] 唐正洪, 蔡强国. 我国主要土壤侵蚀产沙模型研究评述[J]. 山地学报, 2002, 4(22): 466- 475.  
Tang Zhengong, Cai Qianguo. Review on the studies of Chinese main soil erosion and sediment yield models[J]. Journal of Mountain Research, 2002, 4(22): 466- 475.
- [4] 雷廷武, 邵明安, 李占斌. 土壤侵蚀预报模型及其在中国发展的考虑[J]. 水土保持研究, 1999, 2(6): 162- 166.  
Lei Tingwu, Shao Ming an, Li Zhanbin. Soil erosion predict models and the strategic considerations for their development in China [J]. Research of Soil and Water Conservation, 1999, 2(6): 162- 166.
- [5] 汪东川, 卢玉东. 国外土壤侵蚀模型发展概述[J]. 中国水土保持科学, 2004, 2: 14- 17.  
Wang Dongchuan, Lu Yudong. Development of soil erosion models abroad[J]. Science of Soil and Water Conservation, 2004, 2: 14 - 17.
- [6] 张光辉. 土壤侵蚀模型研究现状与展望[J]. 水科学进展, 2002, 3(13): 389- 394.  
Zhang Guanghui. Research situation and prospect of the soil erosion model[J]. Advances in Water Science, 2002, 3(13): 389- 394.
- [7] 符素华, 刘宝元. 土壤侵蚀量预报模型研究进展[J]. 地球科学进展, 2002, 1(17): 78- 84.  
Fu Suhua, Liu Baoyuan. Evolution of the soil erosion model[J]. 2002, 1(17): 78- 84.
- [8] 吴发启, 赵晓光, 刘秉正. 缓坡耕地侵蚀环境及动力机制分析[M]. 陕西科学技术出版社, 2001: 157- 161.  
Wu Faqi, Zhao Xiaoguang, Liu Bingzheng. Analysis of Erosion Environment and Dynamic Mechanism on Cultivated Land of Gentle Slope[M]. Shaanxi Science and Technology Press, 2001: 157- 161.

- [9] 李世玲. 基于投影寻踪和遗传算法的一种非线性系统建模方法[J]. 系统工程理论与实践, 2005, 25(4): 22- 28.  
Li Shiling. A nonlinear system modeling method based on pursuit and genetic algorithm[J]. Systems Engineering - Theory & Practice, 2005, 25(4): 22- 28.
- [10] 孙全敏, 王占礼, 邵明安. 生物种群 Logistic 扩展模型灰色增量生成参数辨识方法及应用[J]. 系统工程理论与实践, 2000, 20(8): 105- 113.  
Sun Quanmin, Wang Zhanli, Shao Mingan. Distinguishable methods and applications of grey increment parameter in extension model of biological population logistic[J]. Systems Engineering - Theory & Practice, 2000, 20(8): 105- 113.
- [11] 孙全敏, 王占礼, 邵明安. 灰色非线性增量动态模型在农药残留量模拟中的应用[J]. 系统工程理论与实践, 2000, 20(9): 125- 129.  
Sun Quanmin, Wang Zhanli, Shao Mingan. A dynamic model of grey nonlinear addition used in chemical remaining simulation[J]. Systems Engineering - Theory & Practice, 2000, 20(9): 125- 129.
- [12] 江忠善, 王志强, 刘志. 黄土丘陵区小流域土壤侵蚀空间变化定量研究[J]. 土壤侵蚀与水土保持学报, 1996, 1(2): 1- 9.  
Jiang Zhongshan, Wang Zhiqiang, Liu Zhi. Quantitative study on spatial variation of soil erosion in a small watershed in the loess hilly region[J]. Quantitative Study on Spatial Variation of Soil Erosion, 1996, 1(2): 1- 9.

(上接第 170 页)

## 5 结束语

通过水权交易 CAS 模型的仿真实验, 市场配置机制的引入不仅提高了水资源配置的有效程度和效率, 也在一定程度上为政府宏观决策提供了参考依据, 具体表现在: <sup>1</sup> 随着水权交易的进行, 用水主体的标准用水量下降, 平均单位用水效益增加, 用水效益和用水效率均得到提高, 同时又促进节水投资; <sup>2</sup> 随着市场机制的引入, 政府给予用水主体的水权强度提高, 政府满意度不断提高, 政府水价亦趋于合理等. 这些结论表明了以市场机制配置水资源是有效的, 合理可行的. 从仿真结果还可预见, 我国将在很长一段时间里采用行政配置与市场配置相结合的方式配置水资源.

## 参考文献:

- [1] 常云昆. 黄河断流与黄河水权制度研究[M]. 北京: 中国社会科学出版社, 2001.  
Chang Yunkun. Breakoff of Yellow River and Research on Water Right System of Yellow River[M]. Beijing: China Social Sciences Press, 2001.
- [2] 王亚华. 水权解释[M]. 上海: 上海人民出版社, 2005.  
Wang Yahua. Economic Explanation of China's Water Rights[M]. Shanghai: Shanghai People's Publishing House, 2005.
- [3] 胡鞍钢, 王亚华. 转型期水资源配置的公共政策: 准市场和政治民主协商[J]. 中国软科学, 2000, (5): 5- 11.  
Hu Angang, Wang Yahua. China's public policy of water resources allocation in transition: Quasi-market, political and democratic consultation[J]. China Soft Science, 2000, 5: 5- 11.
- [4] 汪恕诚. 水权转换是水资源优化配置的重要手段[J]. 水利规划与设计, 2004, 3: 1- 3.  
Wang Shucheng. The vital means to water resources optimization allocation: Transition of water rights[J]. Water Resources Planning and Design, 2004, 3: 1- 3.
- [5] 王慧敏, 佟金萍, 马小平, 等. 基于 CAS 范式的流域水资源配置与管理及建模仿真[J]. 系统工程理论与实践, 2005, 23(5): 34- 36.  
Wang Huimin, Tong Jinping, et al. Complex adaptive system(CAS)based allocation and management of river basin water resources [J]. System Engineering - Theory & Practice, 2005, 23(5): 34- 36.
- [6] Holland J H. Hidden Order[M]. Addison-Wesley, Reading, MA, 1995.